Title	作用素環の共形ネットの分類について　(C^*-環と関連する力学系)
Author(s)	河東, 泰之
Citation	数理解析研究所講究録 (2004), 1379: 1-11
Issue Date	2004-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/25654
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1379 巻 2004 年 1-11

作用素環の共形ネットの分類について

東京大学大学院数理科学研究科：河東泰之 (Yasuyuki Kawahigashi)
Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo

1 Introduction

代数的場の量子論 (algebraic quantum field theory) とは，時空領域でパラメトライズされた作用素環の族によって場の量子論の数学的構造を明らかにする理論である．([12] が標準的な教科書である．) 純粋に数学的な立場からは，これはしかるべき公理系を満たす作用素環の族の研究と考えられるので，基本的な問題は (自然な同型についての) 分類問題である.「時空」としては 4 次元 Minkowski 空間が伝統的にもっとも自然な設定であるが，この場合は自明な例と考えられる自由場の例しか知られておらず，とうてい分類理論を展開するような状況にはない．しかし 2 次元 Minkowski 空間を分解することによって，1 次元空間上の領域，すなわち実軸上の区間によってパラメトライズされた作用素環の族を考えることができ，これについての分類理論は近年大きく進展している．この場合，1 次元ユークリッド空間をコンパクト化して S^1 とし，そこでより「高い対称性」としての共形対称性を公理として要請した作用素環の族を考えることが行われている．(これは，より強い公理系を要請しているということである．) そのような作用素環の族が，題名にある「作用素環の共形ネット」である．これは chiral な共形場理論を作用素環論的に調べていることになる．もともと Minkowski 空間でしかるべき形の時空領域たちを考えていて，その領域たちは包含関係について有向集合をなしているので，ネットという名前が使われている．S^1 上で考える場合は,「時空領域」にあたるものは,「開区間」，すなわち空でも稠密でもない連結開集合であり，これらは包含関係について有向集合をなしていないので，もはやネットというべきではないが，実際にはよくネットと呼ばれている．ここでは，この，S^1 上の作用素環の共形ネットについて，やるべきこと，できるはずのこと，できていることを解説する．テクニカルなことにはほとんどふれず，できるだけ全体の概観を示したいと思う．S^1 上の作用素環の共形ネットは，連続無限個からなる作用素環の族だが,「2 個の作用素環の族」である subfactor と似た点がたくさんある．この類似に重点をおいて解説を行う．

なお本稿の内容は，立教 SFR 自由プロジェクトの研究会報告集「弦理論・共形場理論と保型性」に私が書いた,「共形場理論の分類と作用素環」とかなり重なっていることをお断りしておく．

2 公理系

上で述べた意味での S^1 上の区間 I に対して，共通の Hilbert 空間 H に作用している von Neumann 環 $A(I)$ が与えられており，この族が物理的に自然な公理系を満たしていると言う状況を数学的に研究することが目的である．$A(I)$ は I で観測可能な物理量 (に対応する自己共役作用素) たちの生成する作用素環と考えている．これは 2 次元の

conformal field theory (CFT) の分解に現れる状況なので，chiral な CFT ともよく呼ばれる．以下，簡単に公理について説明する．詳しくは [11], [15] などを見よ．

まず，$I_1 \subset I_2$ ならば $A(I_1) \subset A(I_2)$ というのが公理の一つである．これは広い時空領域の方が，観測可能な量がたくさんあるということなので当然の要請である．

次に局所性の公理について述べる．これは光の速度でも到達できないような時空領域の間には何の相互作用もなく，したがって，それぞれの領域で観測可能な物理量を表す作用素は交換する，という相対論的な要請である．これは chiral CFT の場合は $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ならば $A(I_1)$ の元と $A(I_2)$ の元が交換するという簡単な形を取る．

次に共変性というものがある．これは，時空の対称性を表す群 G の projective unitary 表現 u_g が今考えている Hilbert 空間上にあって，$u_g A(I) u_g^* = A(gI)$ になるというものである．G の取り方は一意ではない．たとえば Minkowski 空間で Poincaré 群をとった場合は Poincaré 共変性と言う．ここで考える「時空」S^1 の対称性としては Möbius 群 $PSL(2,\mathbf{Z})$ または，向きを保つ微分同相写像の群 $\mathrm{Diff}(S^1)$ を考える．どちらも「共形」共変性と呼ばれることがあるが，ここでは前者を Möbius 共変性，後者を共形共変性と呼ぶことにする．もちろん後者の方が高い対称性で強い条件である．(前者から後者は一般には導かれないことは知られている．しかし,「まとも」な例では前者と後者はいつも同時に成り立っているので，何らかの「よい」条件の下では両者は同値なのかもしれない．)

さらに，今考えている Hilbert 空間に真空ベクトルと呼ばれる特別なベクトルがあってしかるべき性質を満たしているということと，エネルギーの安定性と言われるスペクトルに関する条件があるが，概略の説明にはとりあえず必要ないのでここでは省略する．(後者は S^1 の回転を表す one-parameter unitary group の生成元が正であることを要請する．この公理は，one-parameter unitary group がしかるべく解析接続できることを導くので重要であるが今はこれには立ち入らない．)

このような公理系を満たす作用素環の族が我々の研究の対象である．

以上が公理系の簡単な説明だが，場の量子論には Wightman の公理系という別のフォーミュレーションもあり，そちらの方が有名だとも言えるので，それとの関係についても少しふれておこう．Wightman の公理系では，作用素値の超関数 $\phi(x)$ の族を考える．これらに対して，共変性とか局所性とかのしかるべきフォーミュレーションを行うのである．そこでこのような $\phi(x)$ たちがあったとすると，時空領域 I に対し，そこに台が含まれるような C^∞ 級関数とペアリングをとって得られる作用素たちを考える．このフォーミュレーションではこれらの作用素は一般に非有界だが，それらの関数を考えることにより，有界な作用素を作ることができる．これらの生成する作用素環を $A(I)$ とすれば上の公理系での作用素環の族が得られる．このようにして，Wightman の公理系と上述の公理系の対応がつき，両者の公理系は本質的には同等のものであると信じられているが，正確にいつ，どのような対応がつくかについては完全にはわかっていない．これについては数多くの論文がある．

また頂点作用素代数についても少し説明しよう．Wightman の公理形に現れる S^1 上の作用素値超関数たちを考えられるのだが，それらを Fourier 級数展開したものをモデルに代数的な公理系を考えて得られるものが頂点作用素代数である．もともとは代数的場の量子論と同じものを研究するための数学的枠組みとして別々に考え出されたものなので，両者に多くの類似点があるのは明らかで，多くの並行する結果が得られている．しかし，両者のより深い直接的な関係を明らかにすることはこれからの研究テー

マである．たとえば頂点作用素代数の理論においては，有限単純群モンスターとそれにかかわるムーンシャインの研究が盛んであるが，代数的場の量子論においては対応するものは(存在するに違いないと思われるが) まだ得られていない．(このことについては2004年春にいくつかの進展が得られたが，まだ決定的なことを書く段階にいたっていないのでここでは書かない．)

3 Subfactor の分類との類似

さて，上のような S^1 上の作用素環の共形ネットは物理的な背景を忘れてしまえば単に，ある条件を満たす作用素環の族である．そこで自然な同型類が考えられるのでそれによる分類問題というものが数学的に考えられる．これは，作用素環の族の分類として，Jones 理論における subfactor の分類と (少なくとも形式的には) よく似た種類の問題である． 一般の作用素環，特に Connes 以来の von Neumann 環の分類理論についてみると，基本原理は「amenability と総称される解析的にたちのよい条件の下では，表現論的な不変量によって完全に分類できる」というものである．したがって，S^1 上の作用素環の共形ネットについても同種の原理が成り立つことは確実であると思われる．すると問題は，ここでの amenability は何か，表現論的不変量とは何か，ということである．歴史的な順番に従い，後者の方から考えてみよう．なお，多くの人が subfactor についてある程度知っているであろうということと，subfactor の方が分類理論が先行しているということから，subfactor との類似についてしばしばふれるが，実際には作用素環のネットの方が subfactor より昔から研究されているものである．

S^1 上の作用素環の共形ネットの表現論は，Doplicher-Haag-Roberts (DHR) 理論 [6] と呼ばれるものである．S^1 上の作用素環の共形ネットを一つ固定しよう．定義によってもともと，このネットの各作用素環たちは真空ベクトルを持つ Hilbert 空間に作用しているのだが，真空ベクトルを持たない別の Hilbert 空間への作用を考えることができる．すなわちネット内の個々の作用素環が別のある Hilbert 空間に表現されており，それらの間に compatibility がある，ということで，このようなものを考えるのはごく自然なことである．DHR 理論の重要なポイントはこのような表現たちに対して，statistical dimension と呼ばれる次元のようなものが定義できること，表現のテンソル積によく似た演算が自己準同型の合成によって定義できること，これらによって，S^1 上の作用素環の共形ネットの表現たちはコンパクト群の unitary 表現たちと非常によく似たふるまいをすること，である．

DHR 理論の基本的な対象は $3+1$-次元の Minkowski 空間であったが，時空の次元が2以下になると，状況が変わるということはかなり前から認識されていた．ここで主に考えたいのは，S^1 上の chiral な CFT なので，DHR 理論をその場合に書き直したものを，Fredenhagen-Rehren-Schroer[9] に沿って説明しよう．

S^1 上の作用素環のネット $A(I)$ を考える．(共変性は，Möbius 群でも Diff でもよい．あるいは表現論を考えるだけならもっと弱い仮定でもよい．) このとき自動的に，局所性の公理はもっと強い形でなりたっていることがわかっている．すなわち，S^1 上の区間 I について，その補集合の内部を I' と書くと，$A(I)' = A(I')$ がなりたっている．ここで左辺の $'$ は，$A(I)$ の commutant である．この等式を Haag duality と言う．さて，$A(I)$ たちの表現 π_I が与えられたとしよう．(ネットの表現は各作用素環の表現の族なので，表現の方にも I をつけた．) すると各 $A(I)$ は自動的に III 型 factor になってお

り，π_I たちの行き先の Hilbert 空間を，もとの真空ベクトルを持つ Hilbert 空間に取り替えることができる．このとき表現の unitary 同値類は変えなくてよい．さらにこのとき，一つの区間 I_0 を固定しておけば，π_{I_0} は，恒等写像であるようにできるのである．このとき，$A(I_0')$ の元 x と，$A(I_0)$ の元 y を任意に取ろう．もともとは局所性によって $xy = yx$ であるから表現された後でもこの関係は成り立たなくてはならない．しかし今は，上の設定より，y については表現した後でも y のままである．したがって，$\pi_{I_0'}(x)$ は，y と交換している．このとき Haag duality によって，$\pi_{I_0'}(x) \in A(I_0')$ となる．よって，$\pi_{I_0'}(x)$ は $A(I_0')$ の自己準同型を与えるのである．この自己準同型は自動的に単射になるが，一般には全射ではない．全射でなくなることはしばしばあり，その場合の方がずっと興味深いケースである．(なお，本当は x の表現の扱いについて上では少しごまかしているが，本質には関係ないので気にしないことにする．) さてこのようにして，表現から自己準同型を作ることができた．逆にしかるべき自己準同型がそのまま表現を与えることも示せる．ここで，上で問題になった表現のテンソル積の演算を考えよう．これはある種の積演算であるが，作用素環の自己準同型たちには明らかな積演算として合成がある．実際，このように自己準同型を合成することによって新しい表現ができることがわかる．これがテンソル積と呼ばれる演算であり，実際に通常の群の表現のテンソル積によく似た性質を持っていることがわかる．さらに表現の statistical dimension という，次元にあたる量が定義できるのだが，Longo [20] によって，これは自己準同型の値域が持つ Jones index の平方根に等しいことが示された．もともとの DHR 理論の設定では時空の次元が 3 以上であり，そのときはこの statistical dimension はいつでも整数値を取るのだが，時空の次元が 2 以下の場合，特に S^1 上の作用素環の共形ネットの場合は，非整数値を取ることができる．たとえば，2 未満の値は，$2\cos(\pi/n), n = 3, 4, 5, \ldots$ の形である．その他，直和とか既約分解とか，群の表現に類似の概念がうまく定義できる．

さらにテンソル積の演算についてもっと考えてみよう．通常の群の表現論では，$\pi\otimes\sigma$ と $\sigma\otimes\pi$ は明らかに unitary 同値である．しかし，今テンソル積として考えている演算は無限次元環の自己準同型であり，合成演算が可換であるとはまったく期待できないであろう．実際，勝手に作用素環の自己準同型を二つ取ったのでは，合成演算はまったく可換ではない．ところがここでは勝手な自己準同型ではなく，S^1 上の作用素環の共形ネットの表現から生じたものだけを考えているのであり，このときはネット全体の構造が効いてきて，二つの合成はみごとに unitary 同値になるのである．さらに実はこれ以上の興味深い現象がおきている．群の表現のときは，テンソル積は言わば，trivial に可換である．ネットの表現論でも，時空の次元が 3 以上のときは同様に trivial にテンソル積は可換である．ところが，時空の次元が 2 以下になると，nontrivial に可換になるのである．これはつまり，unitary 同値を与える unitary 作用素が nontrivial な情報をになっており，braiding と呼ばれるものを与えている．これによって，statistical dimension が有限の表現たちは braided tensor category をなしている．これは，Jones 多項式に始まる 3 次元トポロジーの量子不変量と密接に関係している．

また，S^1 上の作用素環の共形ネットには共形共変性があるので，表現の方にもその効果を合わせて考えた，共変表現と言うものが考えられる．しかし statistical dimension が有限のときはこの条件は自動的に成り立つことがわかっているのでこの条件はあまり気にしなくてよい．

さて上のように，S^1 上の作用素環の共形ネットは表現論を通じて (braided) tensor category を生じる．一方，subfactor の理論においても，$N \subset M$ の表現論を通じて，tensor category が生じる．こちらには一般には braiding はないが，このような意味で S^1 上の作用素環のネットと，subfactor にはよく似た点がある

さらに次のような見方をすれば，subfactor との別の関連もある．S^1 上の作用素環のネットが与えられたとき，半円に対応する作用素環を M, その半分である 1/4-円に対応する作用素環を N としよう．通常いつでもするようにある種の既約性の仮定があれば，M と N は自動的に factor になるので，これによって subfactor $N \subset M$ が生じる．後述の split 条件と言うのをさらに仮定すれば，N, M は両方とも自動的に injective type III_1 factor になる．これで III 型になったこと以外は普通の subfactor の設定に近いようだが実はそうでもない．この subfactor は trivial relative commutant どころかとても大きい relative commutant を持ち，index はいつでも無限大で，M から N への conditional expectation さえないからである．そういう意味で，普通の subfactor 理論とは違うのだが，それでも subfactor であるには違いない．また，適切な付加条件をつけておけばこの subfactor $N \subset M$ から S^1 上の作用素環のネットが復元できることも知られているので，この意味で，S^1 上の作用素環のネットの研究はある種の index 無限大の subfactor の研究であるとも言える．また，この subfactor は，Wiesbrock の half-sided modular inclusion [27] というものになっており，ここに出てくる大きい環の modular automorphism group を小さい環に制限したものは，Longo の canonical endomorphism のべき $\gamma, \gamma^2, \gamma^3 \dots$ の連続版であるとも言える．すなわち Jones tower が離散的に番号付けられているものを連続版にしたものがだいたい S^1 上の作用素環のネットであると言ってよい．またこのときに重要なのは，M と真空ベクトルから生じる modular automorphism group を N に制限した，endomorphism の semigroup なので，injective type III_1 factor の E_0-semigroup の研究であるともみなせる．

頂点作用素代数との対比を考えると,「表現論的な不変量」はこの tensor category だけでは不十分だと考えられるのだが，とりあえず amenability に移ろう．まず Jones の subfactor 理論 [13] における，Popa [25] の分類定理を考えよう．Subfactor 理論では，factor の包含関係 $N \subset M$ を考える．このとき，個々の環，N, M の amenability と「組の amenability」を別々に考えなくてはいけないことがわかっている．両者を仮定したとき，表現論のなす tensor category が完全不変量を与える，というのが Popa [25] の分類定理である．(この tensor category については詳しくは [7] を参照のこと．)

S^1 上の作用素環の共形ネットについては個々の作用素環 $A(I)$ の amenability はもちろん考えることができるが，ネットとしての split 条件と言うものが知られており，これが個々の作用素環 $A(I)$ の amenability を導くことが知られている．すなわち，これを仮定すると各 $A(I)$ はすべて自動的に injective type III_1 factor になって互いに同型となる．そこでこの split 条件をたちのよい条件として最初から仮定してしまおう．これが個別の環の amenability であると考えられる．さらに，強加法性と呼ばれる条件と μ-index の有限性と合わせて三つを考えると，amenability にあたるよい条件が得られる，ということが [18] で提案され，完全有理性と名づけられた．ここでは各条件の正確な形は述べないが，強加法性こそが「族の amenability」に当たる条件であると考えられ，μ-index の有限性は，subfactor で言う global index の有限性にあたり，すなわち finite depth 条件にあたると考えられる．[18] ではこの両方を仮定していたが，このうち，強加法性は，split 条件と μ-index の有限性から従うことが最近，[23] によって示された．これはすなわち,「finite depth $\Rightarrow$ amenable」という subfactor 理論の命題の類

似と考えれる．(ただし証明はまったく簡単でもなく，似てもいない．) また subfactor の場合には finite depth ではないが，(strongly) amenable であるということが考えられ，重要なクラスであるが，S^1 上の作用素環のネットでは，これに対応する広いクラスは存在せず，既約表現の同値類の個数が可算であれば実は，自動的に有限個になってしまうということも [23] で示された．つまり，離散的な可算無限群にあたるようなものはこの設定にはない，ということである．ただ，compact 群とその dual の直積のようなタイプのものはあるので，この設定で無限群の amenability の類似は考えられるかも知れない．また，split property と強加法性はある種の duality にあるとも考えられる．つまり，個別の環の amenability と，族の amenability が互いに対になった条件である，ということである．

S^1 上の作用素環のネットの重要な具体例は，Wassermann [26] によって構成された $SU(N)_k$-ネットであり，WZW-model に対応するものだが，これは完全有理的であることが， Xu [29] の結果よりわかる．

また一般的に，完全有理的である場合の表現論の tensor category の braiding は非退化であることが，[18] で示されている．この非退化条件は tensor category の modularity とも呼ばれ，3 次元トポロジーの量子不変量の理論において重要である．

頂点作用素代数や，他のアプローチにおける共形場理論の研究と同様，S^1 上の作用素環の共形ネットにおいても，simple current extension, orbifold construction や，coset construction [30] が研究されており，そこでも完全有理性が重要な役割を果たしている．特に coset construction は後述の Virasoro ネットの研究において重要である．

この話題の最後に，上述の完全有理性は頂点作用素代数における Zhu の C_2 有限性条件 [10, 32] と形式的な類似性を持つことを指摘しておく．[14] にこの類似性についてのもう少し詳しい説明があるが，両者の真の関係はまだまったくわかっていない．

4　分類定理

次に S^1 上の作用素環の共形ネットの表現論の応用として，α-induction の説明をする．これは本来分類理論とは独立な話題のはずだが，以下で述べる現在得られている分類定理では本質的な役割を果たすからである．普通の群の表現論でも大きい群の表現を小さい群に制限する，小さい群の表現を誘導して大きい群の表現を作る，という操作がある．これに対応して，$A(I) \subset B(I)$ という inclusion の S^1 上の作用素環の共形ネットがあったときに，induction/restriction を考えてみたい．大きいネットの表現を小さいネットに表現する操作は自明だが，この操作は群のときと違い，テンソル積演算を保たないのであまり役に立たない．逆に induction の方は，自己準同型で考えて，小さいネットの自己準同型を大きいネットに延長する，と考える．そのような操作は，Longo-Rehren [22] によって導入された．その後，Xu [28] がこれについて興味深い例と性質を数多く見出し，さらに Böckenhauer-Evans [1] がその路線の研究を続け，多くの性質が明らかになった．[1] 以来，この操作は α-induction と呼ばれている．本当は，これによってできる自己準同型は大きいネットの表現ではなく，一般には「表現もどき」にすぎないが今は問題にしない．さらにここでは，modular invariant の関連 [2, 3, 4] にしぼって説明しよう．実は，α-induction には braiding のデータが必要であり，さらにその際 braiding の交差でどちらを選ぶかにより，α^+-induction と，α^--induction があるのである．そこで，小さいネットの表現のなす tensor category が modular であると仮定し

たとき，そこに現れる既約表現 λ, μ に対し，$Z_{\lambda,\mu} = \dim \mathrm{Hom}(\alpha_\lambda^+, \alpha_\mu^-)$ とおく．これが，modular tensor category から自然に生じる $SL(2, \mathbf{Z})$ の unitary 表現の値域と交換することがわかるのである．これが，[2] の主結果の一つである．この際に，α-induction と Ocneanu [24] の graphical な方法との関係を明らかにすることが重要になる．このような行列 Z は，modular invariant と呼ばれ，一般に「少し」しかないことがわかっている．

以上は，S^1 上の作用素環の共形ネットに現れる modular invariant であったが，1+1-次元の Minkowski 空間上の共形共変性を持った作用素環のネットについても，自然に modular invariant が自然に現れることが，Rehren, Müger によってわかっている．ここでも，上記の [2] の結果が元になっており，こちらの結果も分類定理に本質的に必要である．

さて最後に分類定理について述べよう．分類のために必要な不変量の中に，表現のなす modular tensor category は必ず入っているべきだが頂点作用素代数で知られていることと比較すると，それだけでは十分ではないと思われる．ほかの不変量として当然に必要なものは，central charge であるが，これでも不足である．次に考えられるものとしては vacuum character があるが，これは各固有空間の次元を数えているだけなのでこれでもやはり不十分のようである．頂点作用素代数丸ごとが，分類のための「表現論的不変量」なのかもしれない．しかしはっきりしたことはまだよくわかっていない．

Central charge の方については多くの結果がある．ここでは，S^1 上の作用素環の共形ネットを考え，$\mathrm{Diff}(S^1)$ についての共変性を仮定する．すると $\mathrm{Diff}(S^1)$ の projective unitary 表現から有名な Virasoro algebra の表現が現れ，そこでの central charge の値というのが，実数値の不変量として定義される．(詳しくは [15] を見よ．) Virasoro algebra の (unitary) 表現論で，central charge の取りうる値についてはよく調べられており，Friedan-Qiu-Shenker と Goddard-Kent-Olive によって，取りうる値は，1 以上の実数値と，$1 - 6/m(m+1)$, $m = 2, 3, 4, \ldots$ であることがわかっている．(この取りうる値と，Jones index の取りうる値との間に形式的な類似性があることは subfactor 理論の初期から Jones によって指摘されていた．)

ここでは以下，S^1 上の作用素環の共形ネット $A(I)$ の central charge の値が 1 未満であったとしよう．このとき，$\mathrm{Diff}(S^1)$ の projective unitary 表現によって，subalgebra のネット $A_0(I)$ が生じる．ここで，$A_0(I) \subset A(I)$ は上述の α-induction が使える形になっていることがわかる．(これは下記の Virasoro ネットの完全有理性から従う．このことはまったく明らかなことではない．) このとき生じる $A_0(I)$ は，Virasoro ネットと言われる．これは，Wassermann [26] の $SU(2)_k$-ネットに Xu [29] の coset construction を適用して得られるものと同じであることがわかる．よって，α-induction によって，modular invariant が生じるがここで生じる可能性のある行列はすでに，Cappelli-Itzykson-Zuber によって分類がなされている．その行列は，Coxeter 数の差が 1 であるような，A-D-E 型の Dynkin 図形でラベルがつけられる．そこで，やるべきことは，Cappelli-Itzykson-Zuber のリストの各行列に対し，対応する $A(I)$ が存在するかどうか，また存在するときに一意的かどうか，ということが問題になる．このような，存在と一意性を扱う枠組みとして考えられたのが，Longo の Q-system [21] である．頂点作用素代数 V のときは，V の module M_i たちに multiplicity n_i をつけて，$\bigoplus_i n_i M_i$ を作り，これがいつまた頂点作用素代数になるか，という問題が考えられているが，共形ネットの延長問題はこれと本質的に同じ問題である．(ただし，M_i が V 自身のときの n_i は 1 と

し，Virasoro element は V のものを使うとする．これについては [19] を見よ．そこでは Q-system と言う言葉は使われていないが．）この Q-system を扱う一般的な方法は存在しないが，ここでは，ケースバイケースの論法によって個別に処理することができる．すなわち，modular invariant のうち，type I と呼ばれているもの，すなわち，A-D_{2n}-$E_{6,8}$ 型の Dynkin 図形だけを含むものについて，一意的に対応する $A(I)$ が存在し，それ以外の場合は $A(I)$ はないのである．これによって完全な分類リストが得られる．これが，[15] の主結果である．結局現れるものは，

1. Virasoro ネット
2. その simple current extension
3. 4つの例外 ($c = 21/22, 25/26, 144/145, 164/165.$)

となっている．ここで3番目の4つの例外は，E_6, E_8 型の Dynkin 図形にかかわるものである．このうち，二つが Böckenhauer-Evans [1] によって予想された coset であることは比較的容易にわかる．後の二つのうちの一つも Köster によって，coset であることが指摘された．$c = 144/145$ である最後の一つは，simple current extension, orbifold construction, coset consruction などの知られている方法では作れないと思われる新しい例である．

Central charge の値がちょうど1である場合には，上の論法は適用できないが，Carpi [5], Xu [31] によって部分的な分類リストが得られている．後者の方が広い範囲をカバーしており，この分類リストは実際は完全なのものであると予想されている．

また，$1+1$-次元の Minkowski 空間上の共形共変性を持った作用素環のネットについても，central charge が定義でき，それが1未満の場合の分類が，[16] によって行われている．やはり，modular invariant が現れ，Q-system の研究が問題になる．新しい道具は，tensor category の 2-cohomology 消滅である．

Central charge が 1 を超えた場合についての分類理論はまったくできていない．基本的な問題は，当然次のものである．「S^1 上の作用素環の共形ネットで，完全有理的なものを考える．分類のための表現論的不変量は何か？また実際に生じうる不変量を特徴づけよ．」

最後に，頂点作用素代数との類似，関連についてさらに説明しよう．頂点作用素代数の参考書は上に述べた，[10] のほかに [8] がある．頂点作用素代数の基本的な例を組織的に作る方法としては，integral lattice を用いるものと，Kac-Moody algebra から出発するものがある．(Orbifold construction, coset construction, simple current extension などは，基本的な例を作った後でそれを用いてさらに新しい例を作る方法である．）S^1 上の作用素環のネットを考えると，後者については，Wassermann [26] とその弟子たちの仕事が対応しているが，前者については対応するものがない．これを実行することがまず重要な問題である．(これについては framed vertex operator algebra のアイディアが有効であることが最近わかった．）

特にモンスター，ムーンシャインに関して S^1 上の作用素環のネットの枠組みで考えると次のことが期待される．「$c = 24$ で表現のなす tensor category が自明であることを要求し，さらに L_0 の固有値1の固有空間がゼロになることを要求すれば，そのような S^1 上の作用素環のネットは一意的に存在し，その vacuum character が，J-関数 ($SL(2,\mathbf{Z})$ の Hauptmodul) になり，さらに自己同型群が有限単純群モンスターになる

であろう.」これを確認せよというのが根本的な問題である．なおこの一意性は，頂点作用素代数の枠組みでも未解決予想である．

さらに関連して，上でほとんどふれなかった character についても次の問題が考えられる．完全有理的な S^1 上の作用素環の共形ネットの各表現に対し，character が well-defined であるか？ またそうであるとき，各 character の変数変換 $\tau \mapsto -1/\tau$ としてはたらく S-行列の作用は braiding による S-行列の作用と一致するか？ (T-行列の二つの作用は，[11] の spin-statistics theorem によって一致することがわかっている．) これは，"modular invariance" と総称されるタイプの問題であるが，考えている $SL(2,\mathbf{Z})$ の作用の生じ方が頂点作用素代数の場合の変数変換 [32] と，S^1 上の作用素環の共形ネットの braiding というふうに違っていることが問題である．具体的に知られている例ではすべて両者は一致しているが，たとえば完全有理性のもとで両者が一致するかは重要な問題である．この種の問題は black hole に対する非可換幾何学的アプローチ [17] とも関係がある．

References

[1] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Modular invariants, graphs and α-induction for nets of subfactors, *Commun. Math. Phys.* **197**, 361–386 (1998), II **200**, 57–103 (1999), III **205**, 183–228 (1999).

[2] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, On α-induction, chiral generators and modular invariants for subfactors, *Commun. Math. Phys.* **208**, 429–487 (1999). math.OA/9904109.

[3] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, Chiral structure of modular invariants for subfactors, *Commun. Math. Phys.* **210**, 733–784 (2000). math.OA/9907149.

[4] J. Böckenhauer, D. E. Evans, Y. Kawahigashi, Longo-Rehren subfactors arising from α-induction, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **37**, 1–35 (2001). math.OA/0002154.

[5] S. Carpi, On the representation theory of Virasoro nets, *Commun. Math. Phys.* **244**, 261–284 (2004). math.OA/0306425.

[6] S. Doplicher, R. Haag, J. E. Roberts, Local obsevables and particle statistics, I *Commun. Math. Phys.* **23** 199–230 (1971), II **35**, 49–85 (1974).

[7] D. E. Evans, Y. Kawahigashi, *Quantum symmetries on operator algebras*, (Oxford University Press, Oxford, 1998).

[8] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. V. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster*, Pure Appl. Math. **134** (Academic Press, 1988).

[9] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren, B. Schroer, Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras, I *Commun. Math. Phys.* **125**, 201–226 (1989), II *Rev. Math. Phys.* **Special issue**, 113–157 (1992).

[10] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, Math. Surv. Monog. **88** (Amer. Math. Soc. 2001).

[11] D. Guido, R. Longo, The conformal spin and statistics theorem, *Commun. Math. Phys.* **181**, 11–35 (1996).

[12] R. Haag, *Local Quantum Physics*, (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1996).

[13] V. F. R. Jones, Index for subfactors, *Invent. Math.* **72**, 1–25 (1983).

[14] Y. Kawahigashi, Classification of operator algebraic conformal field theories in dimensions one and two, to appear in Proc. ICMP-2003. math-ph/0308029.

[15] Y. Kawahigashi, R. Longo, Classification of Local Conformal Nets. Case $c < 1$, math-ph/0201015, to appear in *Ann. of Math.*

[16] Y. Kawahigashi, R. Longo, Classification of two-dimensional local conformal nets with $c < 1$ and 2-cohomology vanishing for tensor categories, *Commun. Math. Phys.* **244**, 63–97 (2004). math-ph/0304022

[17] Y. Kawahigashi, R. Longo, Noncommutative spectral invariants and black hole entropy, preprint 2004, math-ph/0405037.

[18] Y. Kawahigashi, R. Longo, M. Müger, Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory, *Commun. Math. Phys.* **219**, 631–669 (2001). math.OA/9903104.

[19] A. Kirillov Jr., V. Ostrik, On q-analog of McKay correspondence and ADE classification of $sl^{(2)}$ conformal field theories, *Adv. Math.* **171**, 183–227 (2002).

[20] R. Longo, Index of subfactors and statistics of quantum fields, I *Commun. Math. Phys.* **126**, 217–247 (1989), II *Commun. Math. Phys.* **130**, 285–309 (1990).

[21] R. Longo, A duality for Hopf algebras and for subfactors I, *Commun. Math. Phys.* **159**, 133–150 (1994).

[22] R. Longo, K.-H. Rehren, Nets of subfactors, *Rev. Math. Phys.* **7**, 567–597 (1995).

[23] R. Longo, F. Xu, Topological sectors and a dichotomy in conformal field theory, to appear in *Commun. Math. Phys.* math.OA/0309366.

[24] A. Ocneanu, Operator algebras, topology and subgroups of quantum symmetry – construction of subgroups of quantum groups – (written by S. Goto and N. Sato), in *Taniguchi Conference in Mathematics Nara '98* Adv. Stud. Pure Math. **31**, (Math. Soc. Japan, 2000) pp. 235–263.

[25] S. Popa, Classification of amenable subfactors of type II *Acta Math.* **172**, 163–255 (1994).

[26] A. Wassermann, Operator algebras and conformal field theory III: Fusion of positive energy representations of $LSU(N)$ using bounded operators, *Invent. Math.* **133**, 467–538 (1998).

[27] H.-W. Wiesbrock, Half-sided modular inclusions of von Neumann algebras, *Commun. Math. Phys.* **157**, 83–92 (1993).

[28] F. Xu, New braided endomorphisms from conformal inclusions, *Commun. Math. Phys.* **192**, 349–403 (1998).

[29] F. Xu, Jones-Wassermann subfactors for disconnected intervals, *Commun. Contemp. Math.* **2**, 307–347 (2000).

[30] F. Xu, Algebraic coset conformal field theories I *Commun. Math. Phys.* **211**, 1–43 (2000).

[31] F. Xu, Strong additivity and conformal nets, math.QA/0303266.

[32] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9**, 237 (1996).